Продолжаем изучать Броуновское движение!

9. Получить уравнение Смолуховского для общего марковского процесса. При каких условиях это нелинейное уравнение описывает брауновское движение и более общие диффузионные процессы?

Кто такой этот Смолуховский?

Мариан Смолуховский – поляк. А учился он в Венском университете. А работал во Львове. Тогда это всё была Австро-Венгерская империя.

Он придумал функцию $\rho(x_0, t_0 \to x, t)$. Это условная вероятность для частицы, которая была в момент времени t_0 в точке x_0, быть в момент времени t в точке x.

Замечание. В учебнике Квасникова и всеми семинаристами принята запись: $\rho(x_0, t_0 | x, t)$. Она напоминает запись условной вероятности, где поменяли аргументы: обычно же $p(B|A)$ – вероятность события B при условии события A, а тут $p(A|B)$ - порядок изменён на хронологический.
Я же буду вместо палочки писать стрелочку, дабы подчеркнуть хронологический порядок и не противоречить теорверу.

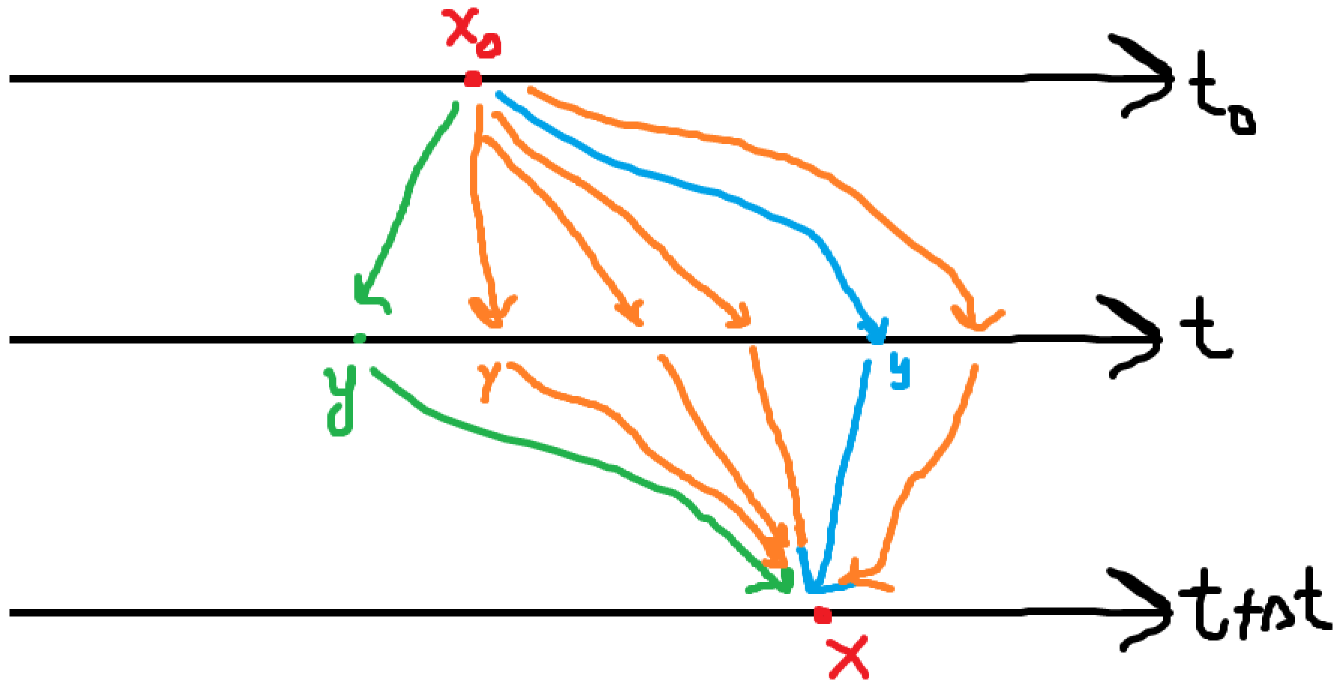
Условие нормировки:

$$\text{Для любых } x_0, t_0, t \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0, t_0 \to x, t) dx = 1$$

Означает, что в момент времени t сумма всех вероятностей равна 0.

Смолуховский всю свою модель строил в предположении марковости: последующеее движение частицы определяется лишь её текущей, последней, координатой, но не тем, что было до этого.

В этом предположении он и записал своё уравнение – уравнение Смолуховского. Он взял три момента времени: t_0, t и $t + \Delta t$ и стал рассуждать так:



В момент времени t частица тогда хоть где-нибудь да быть – в какой-то точке x^I. Ну и проинтегрируем по y:

Для любых $x_0, t_0, t, x, t + \Delta t$

$$\rho(x_0, t_0 \to x, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0, t_0 \to x^I, t)\rho(x^I, t \to x, t + \Delta t)\, dx^I$$

Иногда это уравнение записывают чуть иначе, используя другое свойство функции $\rho(x_0, t_0|x, t)$ - однородность по времени. Мы будем считать, что нам не важно абсолютное значение времени, а смысл имеет лишь разница времён. Тогда можем сократить количество аргументов функции – с 4 до 3: $\rho(x_0 \to x \text{ за } t)$ - плотность вероятности попасть из x_0 в x за время t.

Тогда уравнение Смолуховского запишется как:

$$\rho(x_0 \to x \text{ за } t + \Delta t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x^I \text{ за } t - t_0)\, \rho(x^I \to x \text{ за } \Delta t) dx^I$$

Или, положив $t_0 = 0$, как делает Квасников:

$$\rho(x_0 \to x \text{ за } t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_0 \to x^I \text{ за } t)\rho(x^I \to x \text{ за } \Delta t)\, dx^I$$

Теперь давайте обсудим условия применимости, чего от нас требуют в вопросе. Мы потребовали марковость процесса: зависимость только от последней координаты.

Меж тем, строго говоря, будущее зависит и от предыдущего, т.е. определяется ещё и скоростью.

Какое оправдание можно дать Смолуховскому? Он действовал в грубой шкале времени. Это научный термин – и более того, кафедра квантстата вводит сразу несколько шкал времени:

Шкала	Описание	Характерное время
Точная (механическая) шкала времени	В ней работают законы Ньютона и только они. Движение происходит по инерции с редкими ударами.	Время, за которое одна частица успевает улететь от Броуновской, а другая прилететь. Примерно 10^{-16} с.
Первая грубая шкала времени	В этой шкале мы получали корреляции в прошлой методичке.	Время существенной смены частиц вокруг броуновской. Примерно 10^{-12} с.
Вторая грубая шкала времени	Движение происходит «без памяти», т.е. это марковский случайный процесс.	Время установления распределения Максвелла. Примерно 10^{-10} с.

Так вот, Смолуховский работал именно во второй грубой шкале времени. В частности, это означает, что подставлять в его уравнение интервалы времени меньше 10^{-10} с нельзя.